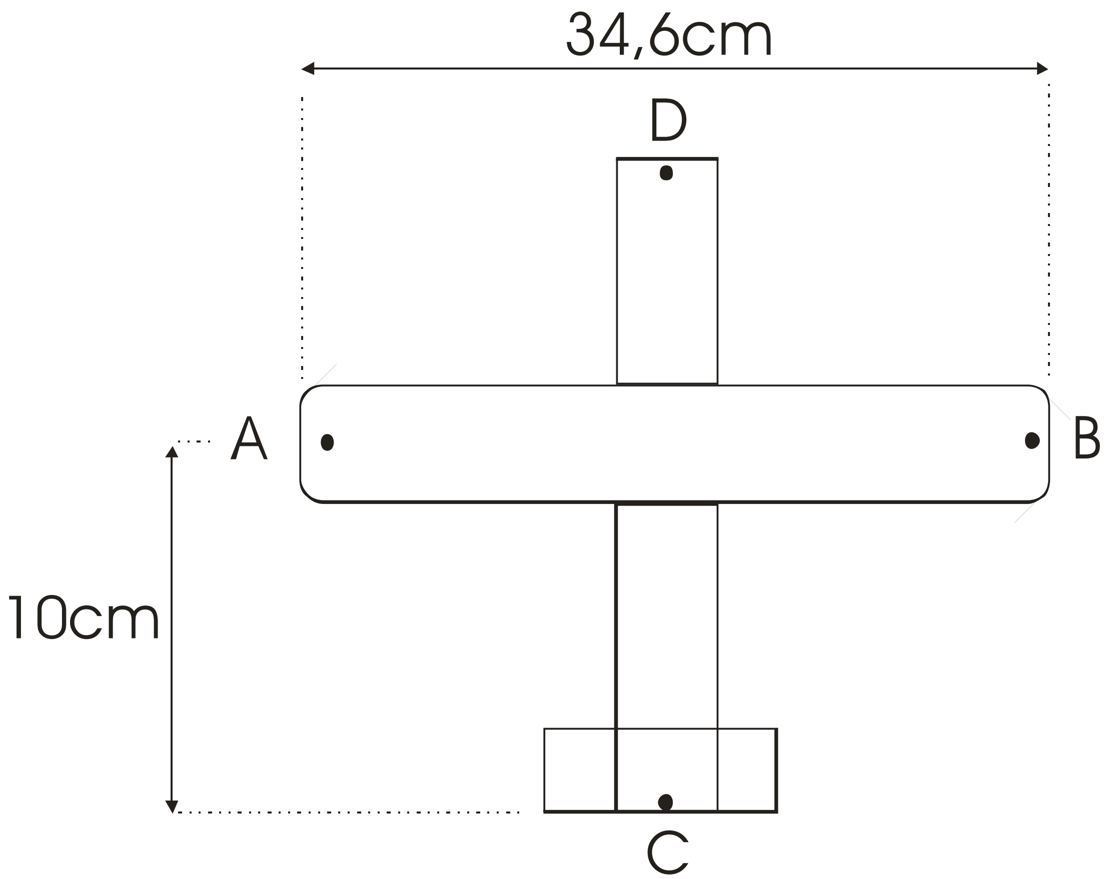
VESTIBULAR CEFET 2º SEMESTRE 2009 – MATEMÁTICA

QUESTÃO 01

O projeto de um avião de brinquedo, representado na figura abaixo, necessita de alguns ajustes em relação à proporção entre os eixos **AB** e **CD**. Para isso, deve-se calcular o ângulo **BÂC** do triângulo **A**, **B** e **C**.

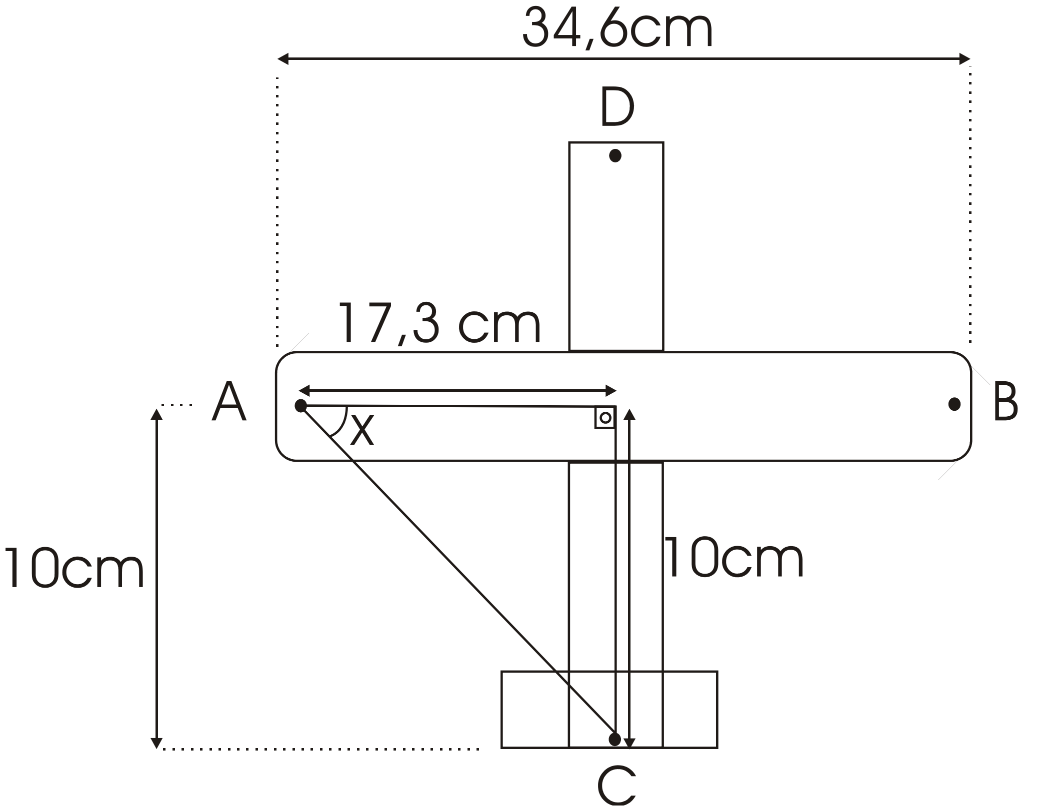


Considerando que o avião é simétrico em relação ao eixo **CD** e que o valor de $\sqrt{3} = 1{,}73$, o valor de **BÂC** vale:

a) 30º
b) 45º
c) 60º
d) 75º
e) 90º

Gabarito: a

Solução:
Se o avião é simétrico em relação ao eixo CD, então o eixo CD divide o avião ao meio, podemos montar um triângulo retângulo e aplicar o conceito de cotangente, ou simplesmente lembrar que num triângulo retângulo se o cateto oposto a um ângulo for x e o adjacente ao mesmo ângulo for $x\sqrt{3}$, então estamos nos referindo ao ângulo de 30º, que é justamente esse caso.



QUESTÃO 02
Com os algarismos 1, 2, 3,..., 9 formam-se **n** números de 4 algarismos distintos, tendo um ímpar na ordem das dezenas. O valor de **n** é

a) 448
b) 896
c) 1.680
d) 2.240
e) 4.480

Gabarito: c

Solução:
Primeiro temos que entender que se os números são formados por algarismos distintos, significa que não podemos repetir os algarismos. A solução deve começar pela restrição, ou seja, algarismo ímpar na casa das dezenas. Para a casa das dezenas, temos 5 possibilidades de escolha (1, 3, 5, 7 ou 9), para as unidades, 8 possibilidades (uma vez que dentre os 9 algarismos um já foi escolhido para a casa das dezenas), para a casa das centenas, 7 possibilidades (devemos excluir os que já ocupam as casas da unidade e dezena) e por último, para a casa das unidades de milhar, 6 possibilidades. Aplicando o Princípio Fundamental da Contagem, teremos: 6 x 7 x 5 x 8 = 1.680.

QUESTÃO 03

Sejam λ a circunferência de equação $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 4 = 0$ e **P** o ponto (k, – 5). Para que o centro de λ, o ponto **P** e a origem dos eixos cartesianos estejam alinhados, o valor de **k** é igual a

a) 5/2
b) 3/2
c) 2/3
d) 3/5
e) 2/5

Gabarito: a

Solução:
Primeiro, identificamos a origem da circunferência completando os quadrados: $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = R^2$, observe que não a preocupação em identificar o valor do raio, somente identificar a origem. λ = (– 1, 2). Depois aplicamos a condição de alinhamento de 3 pontos:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ k & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} -1 & 2 \\ k & -5 \\ 0 & 0 \end{matrix}\Bigg| = 0$$

5 – 2k = 0, k = 5/2.

QUESTÃO 04

Se a matriz A = $\begin{bmatrix} 1+i & i & 1 \\ i^3 & -1+i & 1 \\ i^2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, então o valor do det(A) é:

a) 1 – 2i
b) 1 + 2i
c) 2 – 2i
d) – 2 – 2i
e) 2 + 2i

Gabarito: a

Solução:
Primeiro vale lembrar que: $i^2 = -1$ e que $i^3 = -i$. Logo, aplicamos a Regra de Sarrus após as devidas substituições:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1+i & i & 1 \\ -i & -1+i & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1+i & i \\ -i & -1+i \\ -1 & 1 \end{matrix}\Bigg| =$$

2 – 2i – (1) = 1 – 2i.

QUESTÃO 05
Sabendo-se que f(x) = (1 – am)^x, com a ∈ $\mathbb{R}_+^*$, é função crescente, pode-se afirmar corretamente que

a) m < 0
b) m > 0
c) m < 1/a
d) m > 1/a
e) m < a

Gabarito: a

Solução:
Uma função exponencial, tipo y = a^x, é dita crescente se a > 1, logo:
1 – am > 1
– am > 0
m < 0

QUESTÃO 06

Uma forma simplificada da expressão

$$\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2+2\sqrt{xy}}{\left[1-\left(\frac{x}{y}\right)^{-2}\right].x^2},$$

Com x.y ≢ 0 e x ≢ y, é:

a) (x – y).(x + y)
b) (x + y)
c) $(x + y)^{-1}$
d) (x – y)
e) $(x – y)^{-1}$

Gabarito: e

Solução:

$$\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2+2\sqrt{xy}}{\left[1-\left(\frac{x}{y}\right)^{-2}\right].x^2} = \frac{x-2\sqrt{xy}+y+\ 2\sqrt{xy}}{\left[\frac{x^2-y^2}{x^2}\right].x^2} = \frac{x+y}{(x+y).(x-y)}$$
$$= \frac{1}{(x-y)} = (x-y)^{-1}$$

QUESTÃO 07

O COPOM (Comitê de Política Monetária do Banco Central) anunciou nesta quarta--feira uma nova redução na taxa básica de juros, a Selic, que caiu de 11,25% aa para 10,25% aa, o menor patamar da história. Trata-se da terceira redução seguida da taxa básica, que estava em 13,75% aa em janeiro de 2009.

Disponível em: <http://www1.folha.uol.com.br/folha/dinheiro/ult91u558077.shtml>. Acesso em: 29 abr. 2009. (adaptado)

Duas pessoas aplicaram R$ 10.000,00 em um investimento com capitalização composta, taxa de juros Selic e tempo de 1 ano. Ana fez a aplicação em janeiro de 2009, e Pedro, em maio de 2009. Ao final de cada investimento, é correto afirmar que

a) Pedro teve montante 2,5% maior que o de Ana.
b) Ana recebeu um montante 4% maior que o de Pedro.
c) a soma dos montantes de Pedro e Ana supera R$25.000,00.
d) A diferença entre os dois montantes foi de 3,5% do valor aplicado individualmente.
e) A diferença entre os valores recebidos por Ana e Pedro foi de R$100,00 a favor de Ana.

Gabarito: d

Solução:
Embora seja capitalização composta, temos os juros anuais para períodos de 1 ano e para facilitar o mesmo capital inicial, logo, poderemos tratar as aplicações como se fossem juros simples. Como há alternativas comparando os percentuais, o que é bem mais fácil, começaremos por elas. Em janeiro a taxa era de 13,75%, enquanto que em maio era de 10,25%, cuja a diferença é de 3,5%, ou seja, o montante de Ana em relação ao valor aplicado, rendeu 3,5% a mais que o do Pedro.

QUESTÃO 08

Se a função **h** é tal que $0 < h(x) < 1$ para todo **x** real, então, uma função **f**, obtida de **h**, com f(x) pertencente ao intervalo –1 a 1, para qualquer **x** real, pode ser expressa por

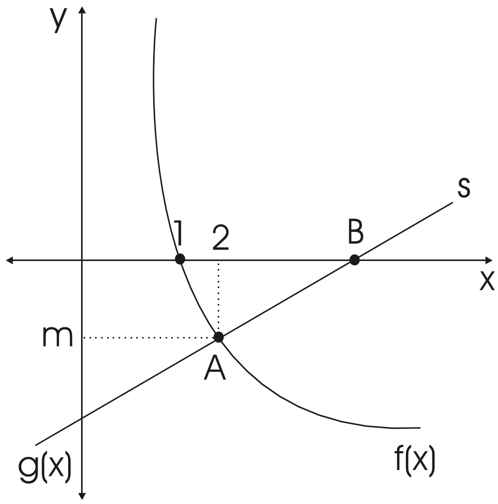
a) $2h(x)$
b) $3h(x) – 1$
c) $h(x) + 1$
d) $h(x) – 1$
e) $2h(x) + 1$

Gabarito: d

Solução:
Uma maneira bem simples é você observar que temos que atender a necessidade de termos uma imagem negativa, para isso: $0 < h(x) < 1$ temos que ao subtrair uma unidade de h(x), estaremos deslocando a imagem de valores próximos a 0 para próximos a – 1. Embora tenhamos agora um intervalo de $]-1; 0[$, este atende a condição, pertence ao intervalo de – 1 a 1.

QUESTÃO 09

No gráfico abaixo, a reta **s**, de coeficiente linear –2 e equação g(x) = px + q, com **p** e **q** reais, intercepta a curva dada por f(x) = $\log_{1/2}$ x no ponto A (2 , m).



As coordenadas do ponto **B**, interseção da reta **s** com o eixo das abscissas, são dadas pelo par

a) (5/2; 0)
b) (3; 0)
c) (7/2; 0)
d) (4; 0)
e) (9/2; 0)

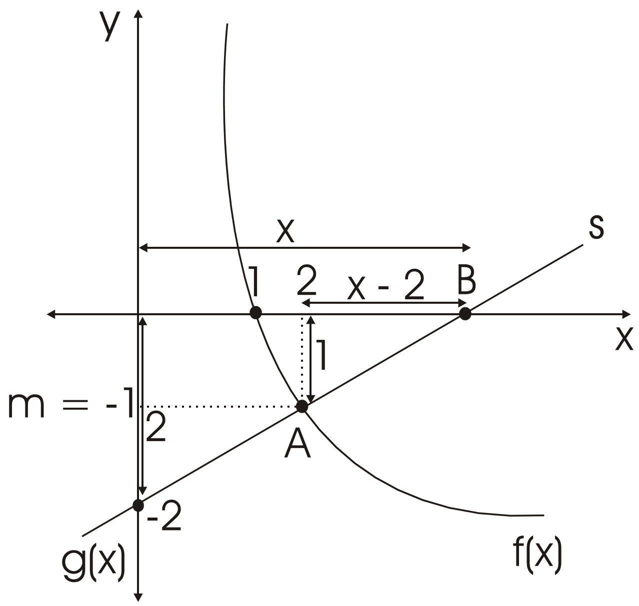
Gabarito: d

Solução:
Primeiramente temos que descobrir o valor de m, para isso: $\log_{1/2}2 = y$, $(1/2)^y = 2$, y = – 1. A partir dessa informação trataremos o problema como semelhança de triângulos e encontraremos a seguinte relação:

$$\frac{x-2}{1} = \frac{x}{2}$$

2x – 4 = x
x = 4

Observe a figura



QUESTÃO 10

Considerando **f** a função real definida por

f(x) = $\begin{cases} (\sqrt{2}-x).(\sqrt{2}+x), \; se \;\; x \leq 1 \\ 2- \;x, \;\; se\; 1 < x < 3 \\ 3, \;\; se \;\; x \;\geq 3 \end{cases}$

e A = $\sqrt{f\left(-\frac{1}{2}\right)-f\left(\frac{7}{2}\right).f\left(\frac{3}{2}\right)}$, então o conjunto-solução da equação | A.(x – 2)| = 3 é

a) { 10 }
b) { 3; 5 }
c) { 8; 10 }
d) { – 4; 5 }
e) { – 4; 8 }

Gabarito: e

Solução:
Primeiro temos que determinar o valor de A:
f(- ½) = 7/4, f(7/2) = 3, f(3/2) = ½

A = $\sqrt{\left(\frac{7}{4}\right)-3.\left(\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

Substituindo na equação teremos:

1/2.(x – 2) = 3
x – 2 = 6
x = 8

ou

1/2.(x – 2) = – 3
x – 2 = – 6
x = – 4

QUESTÃO 11

Numa sala de aula com 12 alunos, dos quais 7 são meninas, deverá ser escolhido um grupo composto de 5 alunos, com pelo menos 3 meninas. A probabilidade de o grupo escolhido ter um número exato de 3 meninas é, aproximadamente,

a) 62%
b) 64%
c) 66%
d) 68%
e) 70%

Gabarito: b

Solução:
Primeiro vamos ao conceito mais simples do que é probabilidade, razão entre o número de casos favoráveis e casos possíveis. Casos favoráveis está bem definido, todos os casos onde há exatamente 3 meninas e 2 meninos. O número de casos possíveis está bem na leitura “deverá ser escolhido um grupo composto de 5 alunos, com pelo menos 3 meninas”, ou seja, teremos grupos de 3 meninas e 2 meninos ou 4 meninas e 1 menino ou somente grupos de 5 meninas, logo:

$$P = \frac{\binom{5}{2}.\binom{7}{3}}{\binom{5}{2}.\binom{7}{3} + \binom{5}{1}.\binom{7}{4} + \binom{5}{0}.\binom{7}{5}} = \frac{350}{350 + 175 + 21} = \frac{350}{546} \cong 0{,}641 = 64{,}1\%$$

QUESTÃO 12

O conjunto-solução da equação $cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ para $x \in [0, 2\pi]$ é

a) $\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$
b) $\left\{\frac{\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}\right\}$
c) $\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{11\pi}{6}\right\}$
d) $\left\{\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}\right\}$
e) $\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right\}$

Gabarito: b

Solução:

$$cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos x\,.cos\frac{\pi}{6} + senx.sen\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}cosx}{2} + \frac{senx}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{3}cosx + senx = 1$$

$$fazendo\ v = \sqrt{3}cosx \quad e \quad u = senx,$$

$$e\ lembrando\ que\ sen^2x + cos^2x = 1, teremos:$$

$$\begin{cases} u + \sqrt{3}v = 1 \\ u^2 + v^2 = 1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema pelo método da substituição teremos:

$$Se\ v = 0, u = 1\ ou\ se\ v = \frac{\sqrt{3}}{2}, u = -\frac{1}{2}$$

$$cosx = 0\ e\ senx = 1, x = \frac{\pi}{2}$$

$$cosx = \frac{\sqrt{3}}{2}\ e\ senx = -\frac{1}{2}, x = -\frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$$

QUESTÃO 13

Para verificar a intensidade ***I***, em graus, de um terremoto em função da energia liberada ***E***, em kWh, Richter utilizou a escala logarítmica , I = 2/3.log (E/E_0) em que E_0 = 10^{-3}. Em 6 de abril de 2009, um forte terremoto sacudiu a cidade de Áquila (Itália), registrando 6,3 graus na escala Richter. Nesse caso, a energia liberada, em kWh, foi de

a) $10^{1,25}$
b) $10^{3,45}$
c) $10^{6,25}$
d) $10^{6,45}$
e) $10^{7,95}$

Gabarito: d

Solução:
Aplicando o conceito e as propriedades do logaritmo chegaremos a solução:

$$\frac{2}{3}.log\,\frac{E}{E_0} = 6,3$$
$$\frac{2}{3}.log\,\frac{E}{10^{-3}} = 6,3$$
$$logE - log10^{-3} = \frac{3}{2}.6,3$$
$$logE - (-3) = 9,45$$
$$logE = 6,45 \;\Leftrightarrow\; E = 10^{6,45}$$

QUESTÃO 14

Na construção de um depósito cilíndrico para adubo orgânico , com capacidade de 520.000 litros, base de alvenaria, sem tampa e 10 m de diâmetro, utilizam-se chapas de aço retangulares com dimensões 3,25 x 2 m. O número de chapas a serem gastas nessa construção é igual a

a) 28
b) 32
c) 36
d) 40
e) 44

Gabarito: b

Solução:
Para sabermos quantas chapas serão necessárias basta dividirmos a área lateral do depósito pela área da chama, tomando o cuidado para que as unidades de medida sejam iguais. Lembrando que o volume de um cilindro é obtido pelo produto da área da base pela altura e que a área lateral do cilindro é 2πR assim como 1dm^3 = 1 litro. Temos: Diâmetro = 10m = 100dm, logo raio = 50dm.

$$V = \pi R^2 h = 520.000$$
$$\pi 50^2 h = 520.000$$
$$2500\pi h = 520.000$$
$$h = \frac{208}{\pi}$$

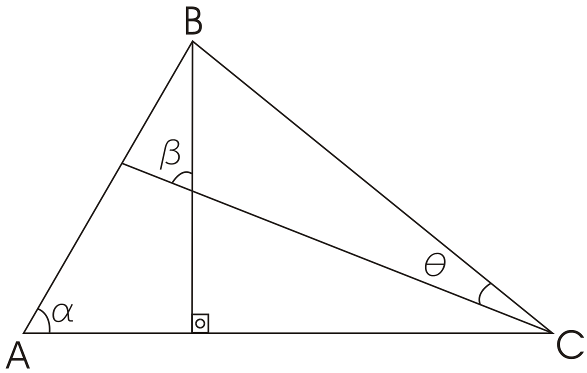
Área lateral do depósito: $Al = 2\pi Rh$
$$Al = 2\pi 50 \frac{208}{\pi} = 20800dm^2 = 208m^2$$

Área da chapa = b.h = 3,25x2 = 6,5m^2
Quantidade de chapas = 208/6,5 = 32

OBS.: UMA DICA IMPORTANTE, COMO NÃO FOI MENCIONADO O VALOR APROXIMADO DE π, NÃO DEVEMOS SUBSTITUÍ-LO POR INICIATIVA PRÓPRIA!

QUESTÃO 15

Na figura abaixo, **AB** é perpendicular a **BC**.

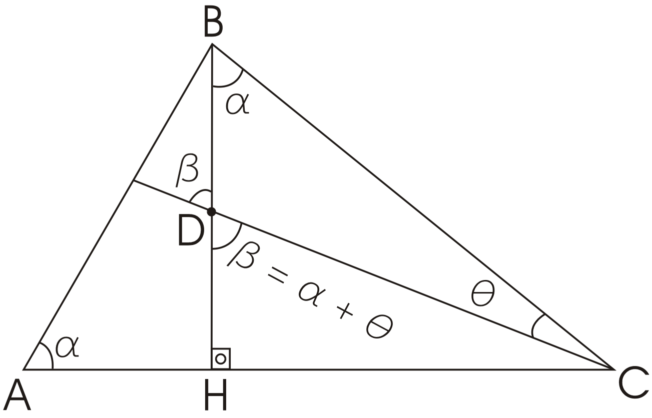


A relação entre $\alpha, \beta\ e\ \theta$ é expressa por

a) $\theta = \alpha + \beta$
b) $\alpha = \theta + \beta$
c) $\theta = \alpha - 2\beta$
d) $\beta = 2\alpha - \theta$
e) $\beta = \alpha + \theta$

Gabarito: e

Solução:
Como AB é perpendicular a BC, o triângulo ABC é retângulo, logo teremos conforme a figura que se segue a semelhança dos triângulos ABH e BCH. Logo após definirmos alguns ângulos pela semelhança, aplicamos o teorema do ângulo externo ao triângulo BCD que nos dará a relação entre os ângulos.



QUESTÃO 16

Um garoto que deseja montar um quebra-cabeça de 100 peças, sendo todas com quatro lados, utilizou o seguinte método:

I - Escolhe-se uma peça **P1** e um de seus lados;

II- Procura-se uma peça **P2** que se encaixe no lado anteriormente escolhido, tomando uma peça entre as candidatas e testando seus lados. Se *não* houver encaixe, ela é descartada dessa pesquisa. Toma-se, então, outra candidata e repete-se o processo até encontrar **P2**;

III- Fixa-se um lado **P2** e procura-se por uma **P3** de igual maneira, sendo que todas as peças ainda *não* encaixadas são candidatas a **P3**;

IV- Repete-se o processo até completar o quebra-cabeça.

O número máximo de tentativas de encaixe que se pode fazer neste processo é

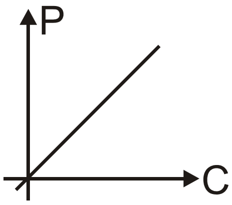
a) 11.890
b) 15.750
c) 19.800
d) 23.500
e) 25.304

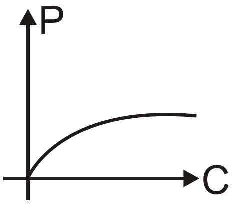
Gabarito: c

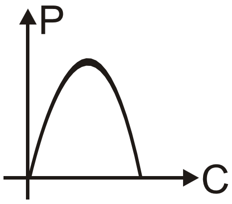
Solução:
Temos que após escolhermos a primeira peça, iremos procurar entre as 99 uma que encaixe, sendo que para cada tentativa de peça, há 4 posições, para a terceira peça, será uma procura entre as 98 peças e para cada uma 4 posições. Temos então a soma de uma PA, a soma dos 99 primeiros números naturais multiplicada por 4 devido aos possíveis encaixes.
$S = (1 + 99).99/2 = 4950$
Logo, o que procuramos é $4S = 4x4950 = 19.800$

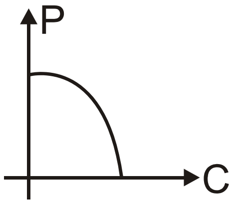
QUESTÃO 17

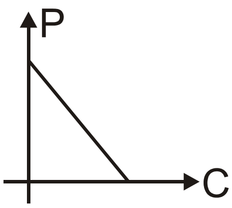
Uma loja de produtos de informática vende pen-drives de capacidade 1GB, 2GB, 4GB, e 8GB pelos preços de R$10,00, R$17,00 R$27,00 e R$42,00, respectivamente. A forma com que o preço **P** varia em função da capacidade **C** do pen-drive está corretamente representada pelo gráfico em

a)


b)


c)


d)


e)


Gabarito: b

Solução:
Poderíamos fazer uma tabela relacionando a capacidade ao preço:
1 – 10
2 – 17
4 – 27
8 – 42
Observe que à medida que aumentamos a capacidade as diferenças de preço não aumentam na mesma proporção, sempre que dobrarmos a capacidade o aumento será um pouco maior em relação ao anterior porém, menos que a proporção do aumento da capacidade. Na capacidade, de 1 para 2, dobramos, porém a diferença foi de R$7,00, de 2 para 4, dobramos e a diferença foi de R$10,00, e de 4 para 8, R$15,00. Logo é a alternativa b que apresenta o gráfico que melhor representa.

QUESTÃO 18

Sobre a função f(x) = mx + n, sabe-se que f(–1) = 12 e f(2) = 3. Outra função definida por g(x) = ax + b intercepta f(x) em A(2,3) e passa por B(–1,–3). A soma dos valores inteiros que satisfazem a inequação f(x).g(x) > 0 é

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

Gabarito: c

Solução:

Primeiramente temos que encontrar as funções f(x) e g(x).

$$\left|\begin{matrix} x & y & 1 \\ -1 & 12 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} x & y \\ -1 & 12 \\ 2 & 3 \end{matrix}\Bigg| = 0$$

9x + 3y – 27 = 0
f(x) = y = – 3x + 9

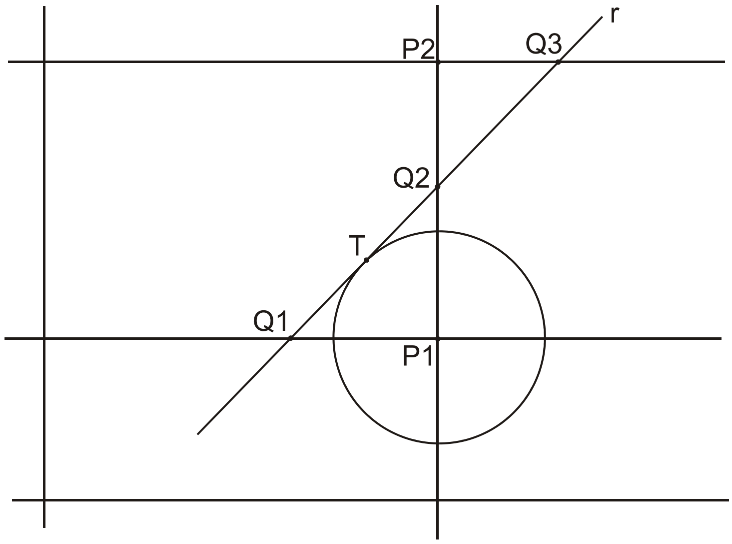
$$\left|\begin{matrix} x & y & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} x & y \\ 2 & 3 \\ -1 & -3 \end{matrix}\Bigg| = 0$$

6x – 3y – 3 = 0
g(x) = y = 2x – 1

O produto das duas funções, vai dar uma equação do segundo grau com a concavidade para baixo, ou seja, entre as raízes teremos o valor positivo. As raízes das funções são ½ e 3, então os valores inteiros entre essas raízes são 1 e 2, cuja soma é 3.

QUESTÃO 19

A figura abaixo mostra a planta de uma rede elétrica de um bairro. A reta **r** é um cabo de alta tensão e deve ser anexado à rede nos pontos **Q_1**, **Q_2** e **Q_3**. As demais retas, sempre paralelas ou perpendiculares entre si, representam as linhas normais de transmissão das ruas, sendo os postes seus pontos de interseção. A circunferência de raio 3, centrada no poste **P_1**, é uma região de isolamento de segurança para o mesmo, e **T** seu ponto de tangência com a reta **r**.



Se a distância entre os postes numa mesma reta é sempre igual a 45/4, e TQ1 é 4, então o valor de P2Q3 é

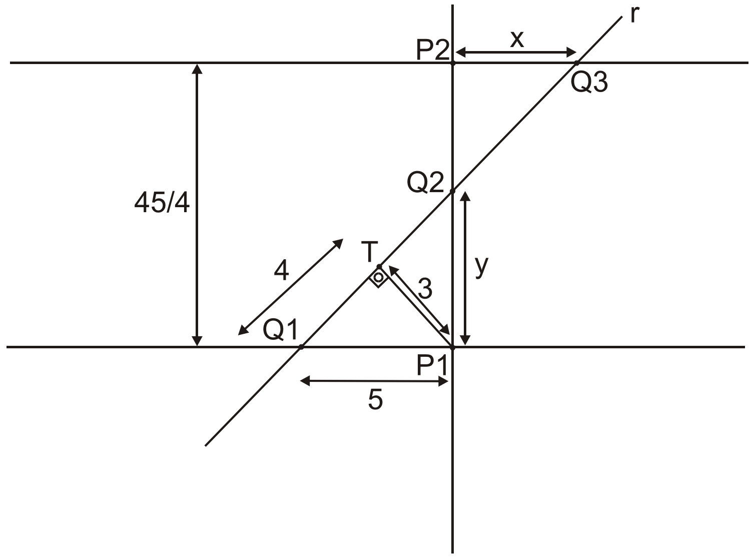
a) 6,0
b) 7,8
c) 10,0
d) 13,4
e) 16,8

Gabarito: c

Solução:
Lembrando que toda tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio, teremos dois triângulos retângulos semelhantes, Q1TP1 e Q2TP1, sendo que o primeiro é o clássico terno pitagórico 3, 4 e 5, para determinar a medida do segmento P1Q2. Chegaremos `a conclusão que P1Q2 = 15/4 e que P2Q2 = 30/4, ou seja, o dobro, como temos que as retas são paralelas, os triângulos P2Q2Q3 e P1Q1Q2 são semelhantes, logo P2Q3 é o dobro de P1Q1. P2Q3 = 2 x 5 = 10. Veja a figura abaixo.

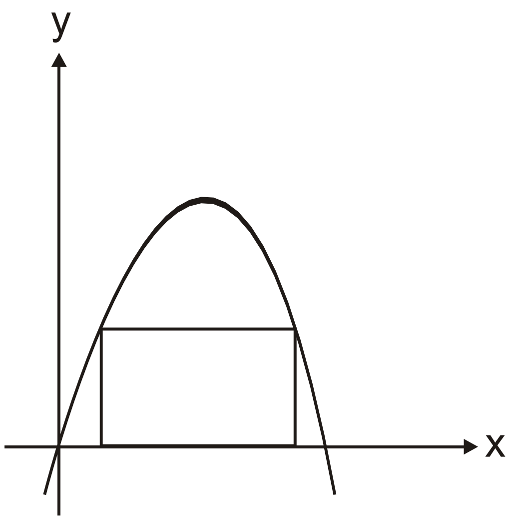
$$\frac{4}{5} = \frac{3}{y}$$

y = 15/4, logo P2Q2 = 45/4 – y
P2Q2 = 45/4 – 15/4 = 30/4



QUESTÃO 20

Na figura abaixo, um retângulo, cuja base mede 4 e está apoiada sobre o eixo **x**, tangencia a parábola de equação $f(x) = -x^2 + 6x$ em dois pontos.



A área desse retângulo vale:

a) 14
b) 16
c) 18
d) 20
e) 22

Gabarito: d

Solução:
Pela equação teremos as raízes 0 é 6, como a base do retângulo é 4, e a parábola é simétrica, teremos que as coordenadas do retângulo são (1,0) e (5,0). Para acharmos agora a altura basta substituir o valor de x por 1 ou 5, que é o ponto de interseção do retângulo com a parábola. Logo, $y = -(1)^2 + 6(1) = 5$, então a altura do retângulo é 5 e a sua área é: $A = 4 \times 5 = 20$. Veja a figura abaixo.