QUESTÃO 01

Em um plano, uma reta que passa pelo ponto $P(8,10)$ tangencia a circunferência $x^2+y^2-4x-6y-3=0$ no ponto A. A medida do segmento PA, em unidades de comprimento, é

a) $\sqrt{12}$

b) $\sqrt{34}$

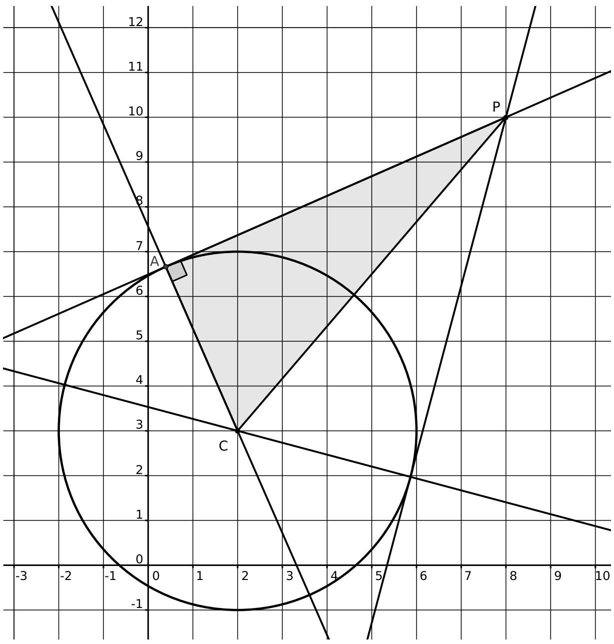
c) $\sqrt{45}$

d) $\sqrt{69}$

e) $\sqrt{85}$

SOLUÇÃO:

Como queremos descobrir o comprimento do segmento, podemos abordar uma solução euclidiana, através do Teorema de Pitágoras, conforme a figura abaixo,



Primeiramente, iremos determinar a a equação reduzida da circunferência, $(x-2)^2+(y-3)^2=4^2$, que irá nos fornecer tanto o centro, $C(2,3)$, quanto o raio, $R=4$. Logo após, iremos determinar a distância entre os pontos A e C, que é a hipotenusa do triângulo APC, observe que embora possa haver duas retas tangentes, as distâncias do ponto A aos pontos de tangência são iguais.

$$
\begin{aligned}
d_{AC} &= \sqrt{(8-2)^2+(10-3)^2} \\
&= \sqrt{(6)^2+(7)^2} \\
&= \sqrt{85}
\end{aligned}
$$

Portanto, basta aplicar o Teorema de Pitágoras,

$$
\begin{aligned}
(AC)^2 &= (AP)^2+(PC)^2 \\
(AP)^2 &= (AC)^2-(PC)^2 \\
AP &= \sqrt{(AC)^2-(PC)^2} \\
&= \sqrt{(\sqrt{85})^2-(4)^2} \\
&= \sqrt{85-16} \\
&= \sqrt{69}
\end{aligned}
$$

Alternativa **d**.

QUESTÃO 02

Se 20% de a equivale a 30% de b e 20% de c é 70% de b, então, a porcentagem de a que equivale a 10% de $(a+b+c)$ é

a) 10

b) 15

c) 20

d) 35

e) 40

SOLUÇÃO:

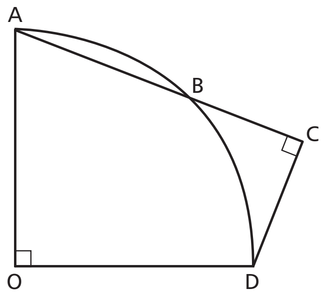
Pelo próprio enunciado, temos as seguintes relações:

$$\begin{aligned}
\frac{20}{100}a &= \frac{30}{100}b \\
2a &= 3b \\
a &= \frac{3}{2}b \\
\frac{20}{100}c &= \frac{70}{100}b \\
2c &= 7b \\
c &= \frac{7}{2}b \\
a+b+c &= \frac{3}{2}b+b+\frac{7}{2}b \\
&= 6b \\
&= 4a
\end{aligned}$$

Alternativa **e**.

QUESTÃO 03

Na figura seguinte, representou-se um quarto de circunferência de centro O e raio igual a $\sqrt{2}$



Se a medida do arco AB é 30º, então, a área do triângulo ACD, em unidades de área, é

a) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

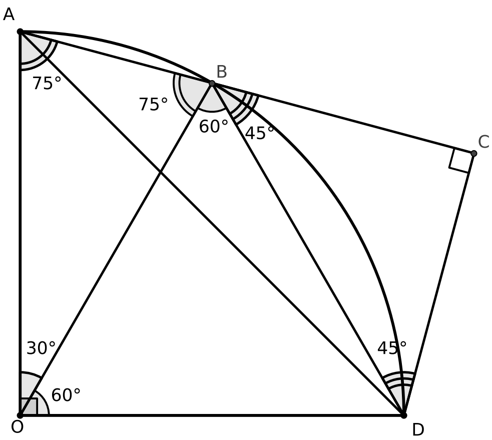
c) $\sqrt{2}$

d) $\sqrt{3}$

e) $\sqrt{6}$

SOLUÇÃO:

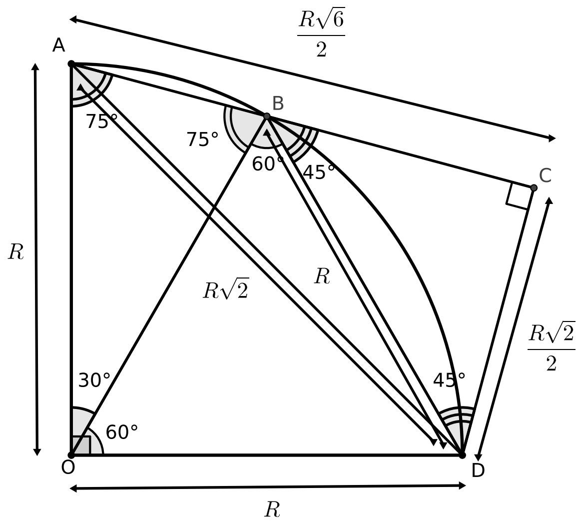
Se a medida do arco $AB = 30°$, então o arco $BD = 60°$, e através dos segmentos OB e BD, iremos obter o triângulo equilátero BOD. O segmento BD, também fornece o triângulo retângulo isósceles BCD e o segmento AD, fornece o triângulo retângulo isósceles AOD, conforme a figura abaixo



considerando o raio da circunferência como R, poderemos concluir através do Teorema de Pitágoras, que os segmentos BC e CD, que são congruentes, valem $\dfrac{R\sqrt{2}}{2}$ e que o segmento $AD = R\sqrt{2}$ (também pelo Teorema de Pitágoras). Para determinarmos a área do triângulo ACD basta determinarmos o semiproduto de seus catetos, logo, iremos determinar o cateto AC, mais uma vez, Teorema de Pitágoras

$$
\begin{aligned}
(AD)^2 &= (AC)^2 + (CD)^2 \\
(AC)^2 &= (AD)^2 - (CD)^2 \\
(AC)^2 &= (R\sqrt{2})^2 - \left(\frac{R\sqrt{2}}{2}\right)^2 \\
(AC)^2 &= 2R^2 - \frac{R^2}{2} \\
(AC)^2 &= \frac{3R^2}{2} \\
AC &= \sqrt{\frac{3R^2}{2}} \\
AC &= \frac{R\sqrt{6}}{2}
\end{aligned}
$$

Para acompanharmos melhor, observe a figura abaixo



Logo a área será determinada através de

$$\begin{aligned} A &= \frac{(AC).(CD)}{2} \\ &= \frac{\frac{R\sqrt{6}}{2}.\frac{R\sqrt{2}}{2}}{2} \\ &= \frac{R^2\sqrt{3}}{4} \text{ (substituindo o valor de R)} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Alternativa **a**.

QUESTÃO 04

Durante o mesmo período, dois irmãos depositaram, uma vez por semana, em seus respectivos cofrinhos uma determinada quantia, da seguinte forma: o mais novo, depositou, na primeira semana, $R\$1,00$, na segunda $R\$2,00$, na terceira, $R\$3,00$ e assim, sucessivamente, enquanto que o mais velho colocou $R\$10,00$ semanalmente até que ambos atingissem a mesma quantidade de dinheiro. Não havendo retirada em nenhum dos cofrinhos, a quantia que cada irmão obteve ao final desse período, em $R\$$, foi de

a) 19

b) 21

c) 190

d) 210

e) 290

SOLUÇÃO:

Se a média de depósitos deve ser $R\$10,00$, um deles fez depósitos obedecendo uma PA de razão 1, e o primeiro depósito foi de $R\$1,00$, basta descobrir quem é o outro termo da PA o qual o 10 é o termo central e o 1, um dos extremos.

$$\frac{1+n}{2} = 10 \Rightarrow n = 19$$

Logo, basta multiplicarmos o resultado encontrado por 10 para determinarmos quanto tinha cada um deles, ou seja, $R\$190,00$.

Alternativa **c**.

QUESTÃO 05

Considere a função $f : A \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = det \begin{bmatrix} 0 & -cos\,x & 0 \\ \\ 0 & -3 & 1 \\ \\ cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) & tg\,x & sen\,2x \end{bmatrix}$$ Pode-se afirmar corretamente que a função f

a) intercepta o eixo y em $x = \pi$.

b) é periódica com período $p = 2\pi$.

c) assume valor máximo em $x = \dfrac{\pi}{4}$.

d) possui imagem igual a $Im\ f = [-1, 1]$.

e) possui domínio $A = \{x \in \mathbb{R} / x \neq k\pi\ e\ k \in \mathbb{Z}\}$.

SOLUÇÃO:

Primeiro passo, vamos calcular o determinante da função, e iremos encontrar $sen\,x.cos\,x$ e lembrar que $sen\,2x = 2.sen\,x.cos\,x$. Então $f(x) = \dfrac{sen\,2x}{2}$. Sabemos que a função seno intercepta o eixo y no valor $x = 0$, descartando a primeira alternativa, quanto ao período, $\dfrac{2\pi}{2} = \pi$, descartando a segunda alternartiva, o valor máximo que $f(x) = sen\,x$ alcança é 1, isso ocorre quando $x = \dfrac{\pi}{2}$, então o mesmo irá acontecer com essa função quando $2x = \dfrac{\pi}{2}$, ou seja, quando $x = \dfrac{\pi}{4}$.

Alternativa **c**.

QUESTÃO 06

O conjunto solução da inequação $e^{2log\ x} - 11.e^{log\ x} + 28 < 0$ é o intervalo

a) $\left]4,7\right[$

b) $\left]10^4,10^7\right[$

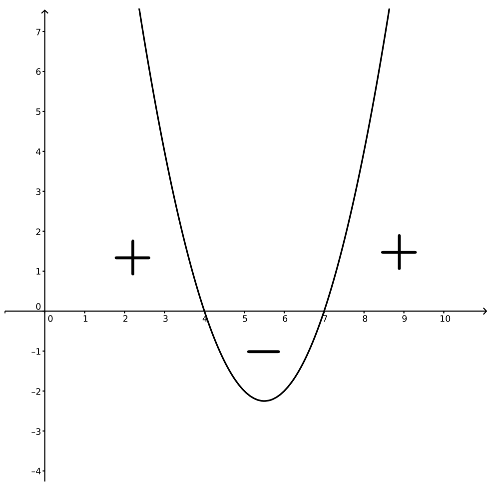
c) $\left]log4,log7\right[$

d) $\left]10^{ln4},10^{ln7}\right[$

e) $\left]e^{log4},e^{log7}\right[$

SOLUÇÃO:

Façamos a seguinte mudança de variável, $y = e^{log\ x}$, consequentemente, $y^2 = e^{2log\ x}$. Agora basta analisar $y^2 - 11y + 28 < 0$, que tem por gráfico



A solução passa a ser o intervalo $4 < y < 7$, ou seja, $4 < e^{log\ x} < 7$. Trabalhemos a seguinte igualdade,

$$
\begin{aligned}
e^{log\ x} &= 4 \\
ln\ e^{log\ x} &= ln\ 4 \\
log\ x.ln\ e &= ln\ 4 \\
log\ x &= ln\ 4 \ \text{(aplicando a definição de logaritmo)} \\
x &= 10^{ln\ 4}
\end{aligned}
$$

Ao trabalharmos a igualdade $e^{log\ x} = 7$, iremos encontrar $x = 10^{ln\ 7}$, ou seja, o intervalo $4 < y < 7$ pode ser escrito como $10^{ln\ 4} < x < 10^{ln\ 7}$.

Alternativa **d**.

QUESTÃO 07

Perdeu-se parte da informação que constava em uma solução de um problema, pois o papel foi rasgado e faz-se necessário encontrar três dos números perdidos que chamaremos de A, B e C na equação abaixo.

$$\frac{Ax-2}{x^2+x+3}+\frac{B}{2x-1}=\frac{Cx^2-9x-C}{2x^3+x^2+5x-3}$$

O valor de $A+B+C$ é

a) -3

b) -2

c) 4

d) 5

e) 7

SOLUÇÃO:

A igualdade acima pode se escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} (Ax-2).(2x-1)+B.\left(x^2+x+3\right) &= Cx^2-9x-C \\ 2Ax^2-Ax-4x+2+Bx^2+Bx+3B &= Cx^2-9x-C \text{ (agrupando os termos)} \\ (2A+B)x^2+(-A+B-4)x+(3B+2) &= Cx^2-9x-C \end{aligned}$$

Que nos conduz ao sistema $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2A & + & B & & & = & C \\ -A & + & B & - & 4 & = & -9 \\ & & 3B & + & 2 & = & -C \end{array}\right.$ logo, $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2A & + & B & - & C & = & 0 \\ A & - & B & - & & = & 5 \\ & & 3B & + & C & = & -2 \end{array}\right.$

cuja solução é $A=3$, $B=-2$ e $C=4$, logo, $A+B+C=5$

Alternativa **d**.

QUESTÃO 08

Um grupo de amigos, ao planejar suas férias coletivas, listou 12 cidades brasileiras que pretendem conhecer juntos, sendo que seis ficam no litoral e seis no interior do país. O critério estabelecido foi de alternar as férias, em cada ano, ora em cidades litorâneas, ora, em interioranas, definindo-se que, nos próximos 12 anos, será visitada uma cidade diferente por ano. Desse modo, a quantidade de maneiras possíveis para atender a esse critério é

a) $2.3.11$

b) $2^2.3.11$

c) $2.3^2.11$

d) $2^8.3^4.5^2$

e) $2^9.3^4.5^2$

SOLUÇÃO:

Temos duas maneiras de planejar, ou começamos pelas cidades litorâneas ou pelas cidades do interior. Uma vez estabelecida a ordem, imaginemos que para o primeiro ano, seja litorânea, para primeira escolha temos 6 alternativas, para o ano seguinte, a cidade do interior, também 6 alternativas, no terceiro ano temos temos 5 alternativas para a cidade litorânea e no quarto ano, temos 5 alternativas para a cidade do interior e assim sucessivamente. Assim podemos expressar nossa solução, atavés do Princípio Multiplicativo, da seguinte maneira

$$2.6!6!$$

$$2.6.5.4.3.2.1.6.5.4.3.2.1$$

$$2.(2.3).5.(2.2).3.2.1.(2.3).5.(2.2).3.2.1$$

$$2^9.3^4.5^2$$

.

Alternativa **e**

QUESTÃO 09

A reta $s: y = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}x + 4$ as retas $s_1 : y = \sqrt{3}\,x + 3$, $s_2 : y = 3$ nos pontos distintos que representam os afixos de números complexos, z_1 e z_2, respectivamente. Nesse caso, a tangente do argumento do complexo $z = z_1 + z_2$ é igual a

a) $\dfrac{5\sqrt{3}}{27}$

b) $\dfrac{9\sqrt{3}}{5}$

c) $\dfrac{\sqrt{3}}{5}$

d) $9\sqrt{3}$

e) $5\sqrt{3}$

SOLUÇÃO:

Primeiro, iremos determinar os pontos de interseção das retas.

$$\begin{aligned}
s &= s_1 \\
-\frac{\sqrt{3}}{3}x + 4 &= 3 \\
x &= \sqrt{3} \\
y &= 3 \\
s &= s_2 \\
-\frac{\sqrt{3}}{3}x + 4 &= \sqrt{3}x + 3 \\
x &= \frac{\sqrt{3}}{4} \\
y &= -\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{3}{4}\right) + 4 \\
y &= \frac{15}{4}
\end{aligned}$$

Agora temos os pontos de interseção, $s \cap s_1 = P_1\left(\sqrt{3}, 3\right)$ e $s \cap s_2 = P_2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}, \dfrac{15}{4}\right)$. Como $z_1 = P_1$ e $z_2 = P_2$, logo, $z_1 = \sqrt{3} + 3i$ e $z_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{15}{4}i$.

Agora temos que $z_1 + z_2 = \frac{5\sqrt{3}}{4} + \frac{27}{4}i$.

vale lembrar que $cos\theta = \frac{a}{\rho}$ e $sen\theta = \frac{b}{\rho}$, logo,

$$\begin{aligned} tg\theta &= \frac{sen\theta}{cos\theta} \\ &= \frac{\frac{b}{\rho}}{\frac{a}{\rho}} \\ &= \frac{b}{a} \\ &= \frac{\frac{27}{4}}{\frac{5\sqrt{3}}{4}} \\ &= \frac{27}{5\sqrt{3}} \\ &= \frac{9\sqrt{3}}{5} \end{aligned}$$

Alternativa **b**

QUESTÃO 10

Em uma enquete realizada com pessoas de idade superior a 30 anos, pesquisou-se as que estavam casadas ou não, se tinham ou não filhos. Constatou-se que 45 pessoas não eram casadas, 49 não tinham filhos, e 99 estavam casadas e com filhos. Sabendo-se que 180 pessoas responderam a essa enquete, o número das que se declararam não casadas e sem filhos foi de

a) 13

b) 23

c) 27

d) 32

e) 36

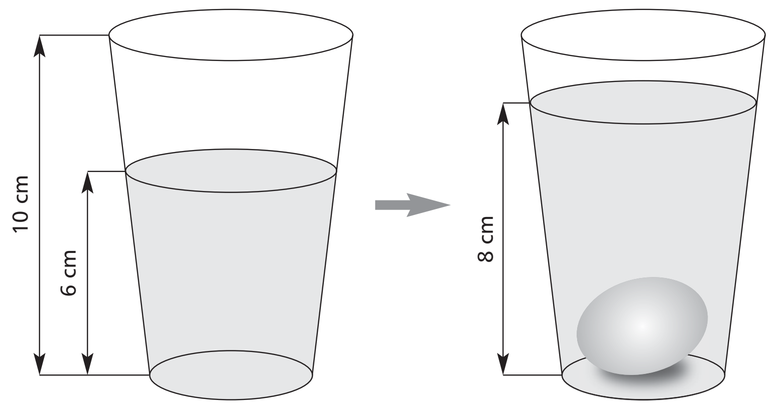
SOLUÇÃO:

Se o total de pessoas era 180, e 45 não eram casadas, podemos conlcuir que 135 eram casadas. Se das pessoas casadas 99 tinham filhos, logo, 36 eram casadas e não tinham filhos. Se todas as pessoas, 49 não tinham filhos e destas, 36 são casadas, então, 13 não são casadas.

Alternativa **a**

QUESTÃO 11

Após mergulhar um ovo em um copo de água de bases (inferior e superior) circulares de diâmetros 4,8 cm e 7,2 cm, respectivamente, um estudante registrou uma elevação no nível de água de 6 cm para 8 cm, tal como mostra a figura seguinte.



Considerando $\pi = 3$, o volume aproximado do ovo, em cm^3, encontra-se no intervalo

a) $\left[0, 25\right[$

b) $\left[25, 50\right[$

c) $\left[50, 75\right[$

d) $\left[75, 100\right[$

e) $\left[100, 125\right[$

SOLUÇÃO:

Observe que o intervalo das alternativas é grande. Isso me permite a concluir que o volume do tronco do cone que representa a variação do volume do copo com o ovo, é maior que o cilindro de mesma altura e raio menor e menor que o cilindro de mesma altura e raio maior. Para isso, necessitamos descobrir a altura do cone, cujo o tronco é o copo.

$$\begin{aligned} \frac{h}{2,4} &= \frac{h+10}{3,6} \\ h &= 20 \end{aligned}$$

Agora iremos denominar de r_1 o raio menor, ou seja, o raio do copo no nível da água sem o ovo, e de r_2 o raio menor, ou seja, o raio do copo no nível da água com o ovo.

$$\begin{aligned}
\frac{2,4}{20} &= \frac{r_1}{26} \\
r_1 &= 3,12 \\
\frac{2,4}{20} &= \frac{r_2}{28} \\
r_2 &= 3,36
\end{aligned}$$

Fazendo as comparações dos volumes dos cilindros e do tronco do cone, denorminaremos de V_1 como o volume do cilindro de raio r_1 e altura 2cm, V como o volume do tronco de cone de raio menor r_1, raio maior r_2 e altura 2cm e V_2 como o volume do cilindro de raio r_2 e altura 2cm, então podemos garantir a seguinte desigualdade

$$V_1 < V < V_2$$

Para estes cálculos iremos usar somente uma casa decimal para o raio dos cilindros, $r_1 = 3,1$ e $r_1 = 3,4$, vale lembrar que o volume do cilindro é: $V = \pi.r^2.h$.

$$57,66 < V < 69,36$$

Alternativa **c**

QUESTÃO 12

Sobre a função descrita por $f(x) = \begin{cases} -3x+6, & \text{se} \quad x \leq 2 \\ x^2-4x-5, & \text{se} \quad x > 2 \end{cases}$, afirma-se que

I - a composição $f(f(f(1)))$ é 31

II - a soma das raízes de f é 7

III - o menor valor que f assume é -9

IV - a imagem de f é $Im\ f = (-9, +\infty)$

Estão corretos apenas os ítens

a) I e II

b) I e III

c) I e IV

d) II e III

e) II e IV

SOLUÇÃO:

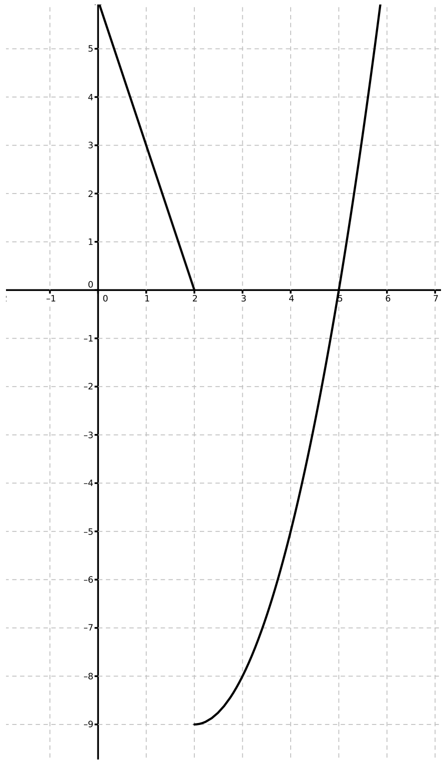
Vamos testar as alternativas.

I - $f(1) = -3(1)+6 = 3$, $f(f(1)) = (3)^2 - 4(3) - 5 = -8$, $f(f(f(1))) = -3(-8)+6 = 30$ FALSA!

II - $-3x+6 = 0$, $x = 2$ e $x^2-4x-5 = 0$, $x' = -1$ mas não pertence ao intervalo da função, e $x'' = 5$, logo, a soma das raízes é 7. VERDADEIRA!

III - O valor do x_v irá fornecer o menor valor da função uma vez que para a primeira condição o menor valor é zero. Para $x_v = 2$, temos que $y_v = -9$, mas o valor de x_v não pertence ao intervalo da função, ou seja, ela nunca terá o valor -9. FALSA!

IV - Basta analisar o grárico. VERDADEIRA!



Alternativa **e**